

УДК 51-37

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHCAD В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Воронцова В.Л., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
milen99@yandex.ru

Багнутдинова А.Г., кандидат технических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
bagoutdinova@rambler.ru

Аннотация. В настоящее время для научно-технических расчетов на компьютерах все чаще и чаще используются не традиционные языки программирования и не электронные таблицы, а специальные математические программы типа Mathematica, MatLab, Maple, Mathcad, Gauss, Reduce, Eureka и др.

Математические пакеты, в особенности Mathcad — наиболее популярный пакет из вышеперечисленного списка, — позволяют специалистам из разных научно-технических областей ++быстро освоить работу на компьютере и реализовать на них математические модели, не вдаваясь в тонкости программирования на традиционных языках (Fortran, C, Pascal, BASIC и др.).

Ключевые слова: математические пакеты, математические программы.

APPLICATION OF THE MATHCAD PACKAGE IN TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES

V.L. Vorontsova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
milen99@yandex.ru

A.G. Bagoutdinova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
bagoutdinova@rambler.ru

Abstract. Currently, for scientific and technical computer calculations, more and more often, not traditional programming languages and not spreadsheets are used, but special mathematical programs like Mathematica, MatLab, Maple, Mathcad, Gauss, Reduce, Eureka, etc.

Mathematical packages, especially Mathcad - the most popular package from the list above, - allow specialists in a specific scientific and technical field to master computer work very quickly and implement mathematical models on them, without going into the subtleties of programming in traditional languages (Fortran, C, Pascal, BASIC, etc.).

Keywords: mathematical packages, mathematical programs.

Пакет Mathcad – одна из систем программирования, которая ориентирована на проведение математических вычислений. Пакет удобно использовать. В нем можно изображать на экране компьютера формулы в их стандартном виде, как будто мы пишем их на доске или читаем в учебнике. Формулы можно не только записывать, но и решать довольно сложные математические задачи в символьном или численном виде. При этом текст можно размещать где угодно, вокруг уравнений, что помогает упорядочить процесс решения. Кроме того можно рисовать двумерные и трехмерные графики.

Пакет Mathcad позволяет соединить в одном рабочем документе текст, графику и математические выкладки. Он помогает лучше понять сложные вычисления. Его применяют для

проверки вычислений в курсах математических дисциплин, таких как математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика.

В пакете Mathcad есть собственная справочная система. С помощью этой справочной системы можно подбирать необходимые функции для проведения сложных вычислений. Рабочие документы можно отправлять на печать в таком же виде, как они выглядят на экране. Mathcad облегчает аккуратную запись хода работ.

В Mathcad есть операторы для вычисления пределов. Пределы могут быть вычислены только символьно (рис.1,2,3).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{3 \cdot x + 6} \rightarrow \frac{1}{3};$$

Рис.1

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3 \cdot x + b}{x^2} \rightarrow \frac{(3 \cdot a + b)}{a^2};$$

Рис.2

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x + \frac{x+1}{|x+1|} \right) \rightarrow -2.$$

Рис.3

Производную можно вычислить с помощью оператора производной (рис.4):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{a \sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)} \right) \rightarrow \frac{1}{(1-x^2)} + \frac{a \sin(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x + \frac{1}{2 \cdot \ln \left[\frac{(1-x)}{(x+1)} \right]^2} \cdot \left[\frac{-1}{(x+1)} - \frac{(1-x)}{(x+1)^2} \right] \cdot (x+1)$$

Рис. 4

Для вычисления интегралов используют символьные операторы вычисления неопределенных и определенных интегралов (рис.5,6,7):

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3 \cdot x + 1} - 1} dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \ln(x) + (3 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \ln \left[(3 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] - \frac{1}{3} \cdot \ln \left[1 + (3 \cdot x + 1)^{\frac{1}{3}} + (3 \cdot x + 1)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x + 1)^{\frac{2}{3}}$$

Рис. 5

$$\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} (1+x)} dx \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \pi - \ln(2)$$

Рис. 6

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2}$$

Рис. 7

Можно вычислить сумму ряда (рис.8):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)} \rightarrow \frac{13}{36}$$

Рис. 8

В символьных преобразованиях есть функция `series`, которая позволяет разложить функцию в ряд Маклорена.

Пример применения функции `series` к разложению функции $\ln(x+1)$ в ряд Маклорена (рис.9):

$$1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot x^5 + O(x^6)$$

Рис.9

В Mathcad можно решать дифференциальные уравнения.

Пример решения дифференциального уравнения. Найти решение уравнения $y' = -y^2 + x$ с начальным условием $y(0)=1$ в 50 точках на отрезке $[0;10]$ (рис.10).

$$\begin{aligned} y_0 &:= 1 \\ D(x, y) &:= -(y_0)^2 + x \\ z &:= rkfixed(y, 0, 10, 50, D) \\ i &:= 0..50 \end{aligned}$$

Рис.10

Как результат выводится матрица, имеющая два столбца:

- точки, в которых осуществляется поиск решения дифференциального уравнения, находятся в первом столбце;
- значения решения в соответствующих точках находятся во втором столбце.

В Mathcad есть функции для вычисления статистических оценок случайных совокупностей. Здесь m и n – это число строк и столбцов рассматриваемых массивов.

***mean*(A)** – возвращает среднее значение элементов массива A размерности $m \times n$ согласно формуле:

$$mean(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}$$

***var*(A)** – возвращает дисперсию элементов массива A размерности $m \times n$ согласно формуле:

$$var(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |A_{i,j} - mean(A)|^2$$

***stdev*(A)** – возвращает среднеквадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии) элементов $m \times n$ массива A :

$$stdev(A) = \sqrt{var(A)}$$

Mathcad использует несколько функций для работы с распространенными плотностями вероятности. Эти функции распадаются на три класса:

- Плотности распределения вероятности: вероятность того, что случайная величина будет находиться в окрестности определенной точки, пропорциональна плотности распределения вероятности случайной величины в этой точке.

- Функции распределения вероятности: они дают вероятность того, что случайная величина будет принимать значение, меньшее или равное определенной величине.

- Обращения функций распределения: они позволяют по заданной вероятности вычислить такое значение, что вероятность того, что случайная величина будет меньше или равна этому значению, будет равна вероятности, заданной в качестве аргумента.

Рассмотрим плотности распределения вероятности, изучаемые в курсе теории вероятностей.

dnorm(x,μ,σ) - возвращает плотность вероятности нормального распределения: в котором μ и σ есть среднее значение и среднеквадратичное отклонение. $\sigma > 0$.

dpois(k,λ) - возвращает плотность вероятности, когда случайная величина X имеет распределение Пуассона, в котором $\lambda > 0$, а k является неотрицательным целым числом.

dt(x,d) - вычисляет плотность вероятности t -распределения Стюдента, в котором d является числом степеней свободы, $d > 0$, а x есть вещественное число.

dunif(x,a,b) - вычисляет плотность вероятности равномерного распределения, в котором a и b являются граничными точками интервала, $a < b$ и $a \leq x \leq b$.

dbinom(k,n,p)- возвращает $P(X=k)$, когда случайная величина X имеет биномиальное распределение, в котором n и k являются целыми числами, удовлетворяющими условию $0 \leq k \leq n$, p удовлетворяет $0 \leq p \leq 1$.

pnorm(x,μ,σ) - возвращает функцию нормального распределения со средним μ и среднеквадратичным отклонением σ , $\sigma > 0$.

ppois(k,λ)- возвращает функцию распределения Пуассона, $\lambda > 0$

pt(x,d) - возвращает функцию t -распределения Стюдента, d есть число степеней свободы, $d > 0$, а x есть вещественное число.

punif(x,a,b) - возвращает функцию равномерного распределения, в котором a и b являются граничными точками интервала, $a < b$ и $a \leq x \leq b$.

pbinom(k,n,p)- возвращает функцию биномиального распределения для k успехов в n испытаниях. n - натуральное число, p - вероятность события, $0 \leq p \leq 1$.

В Mathcad существует много разных функций для работы с матрицами.

rows(A)-число строк в массиве A . Если A -скаляр, возвращает 0.

cols(A)- число столбцов в массиве A . Если A -скаляр, возвращает 0.

length(V)- число элементов в векторе V .

tr(A)- сумма диагональных элементов, называемая следом матрицы A .

rank(A)- ранг вещественной матрицы A .

identity(n)- единичная матрица размера $n \times n$.

jeninv(A)- левая обратная к A матрица L такая, что $L \cdot A = E$, где E - единичная матрица, имеющая то же самое число, что и A . Матрица A - $m \times n$ вещественная матрица, где $m \geq n$.

rref(A)- ступенчатая форма матрицы A .

augment(A,B)- массив, сформированный расположением A и B бок о бок. Массивы A и B должны иметь одинаковое число строк.

stack(A,B)- массив, сформированный расположением A над B . Массивы A и B должны иметь одинаковое число столбцов.

submatrix(A,ir,jr,ic,jc)- субматрица, состоящая из всех элементов, содержащихся в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc . ($ir \leq jr; ic \leq jc$).

На рис.11 приведены примеры использования этих функций:

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} & \text{rref}(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & A^T &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \\
 \text{rows}(A) &= 3 & \text{geninv}(A) &= \begin{pmatrix} 0.035 & 0.275 & -0.169 \\ 0.02 & 0.086 & -0.025 \\ 5.051 \times 10^{-3} & -0.104 & 0.119 \end{pmatrix} \\
 \text{cols}(A) &= 3 & \text{median}(A) &= 5 \\
 \text{tr}(A) &= 19 & \text{mean}(A) &= 5.333 & \text{var}(A) &= 8.222 \\
 \text{rank}(A) &= 2 & \text{stdev}(A) &= 2.867 \\
 V &:= \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} & \text{length}(V) &= 4 \\
 M &:= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} & A &:= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \\
 \text{stack}(A, B) &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ -4 & -9 \\ 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} & \text{augment}(M, A) &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & 2 & -3 & -7 \\ 6 & 9 & 3 & -4 & -9 \end{pmatrix} \\
 N &:= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 4 & 4 \\ -5 & -8 & -2 & 3 & 3 \\ -6 & -9 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \text{submatrix}(N, 1, 2, 0, 2) &= \begin{pmatrix} -5 & -8 & -2 \\ -6 & -9 & -3 \end{pmatrix} \\
 & & \text{submatrix}(N, 2, 4, 1, 3) &= \begin{pmatrix} -9 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\
 & & \text{submatrix}(N, 1, 4, 2, 4) &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 11

Mathcad содержит функции для обычных в линейной алгебре действий с массивами (рис.12).

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 11 & 5 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad C + D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 15 & 20 & 8 \\ 17 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(C + D)^{-1} = \begin{pmatrix} -0.135 & 0.038 & 0.066 \\ 0.039 & 0.044 & -0.05 \\ 0.156 & -0.055 & 2.641 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (C + D)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -0.167 & 5.283 \times 10^{-3} & -0.125 \\ 0.072 & 0.077 & -0.315 \\ 0.259 & 0.049 & 0.648 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot X = D \quad X := C^{-1} \cdot D$$

$$X = \begin{pmatrix} 1.707 & 0.059 & 1.261 \\ -1.049 & 1.272 & -0.742 \\ 0.927 & -0.307 & 0.53 \end{pmatrix}$$

Рис.12

По сравнению с другими математическими пакетами Mathcad имеет ряд преимуществ. Он имеет интерфейс со свободной формой записи, подобно классной доске. Есть возможность комбинирования текста, математических выкладок и графики в любом месте экрана. В этом пакете есть возможность редактировать математические выкладки графически, подобно тому, как они редактируются на обычной доске. Существует возможность слежения за ошибками: сообщение об ошибке отмечает формулу, в которой находится ошибка. Кроме того пакет Mathcad полностью совместим с Windows: он позволяет изменять размеры окон, открывать много окон. Результат печати полученного документа полностью совпадает с видом экрана – Вы получаете то, что видите.

Литература

1. Черняк А. Высшая математика на базе Mathcad общий курс./ А.Черняк, Ж.Черняк, Ю.Доманова. – БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.
2. Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95./ Перевод с англ. – М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1996. – 712 с.